

**TUBOS DE PAREDES GRUESAS
Y DISCOS QUE GIRAN
A GRAN VELOCIDAD**

**§ 60. Ecuaciones fundamentales para el caso
de un cuerpo simétrico respecto a un eje**

En este capítulo se analizará el problema de la resistencia del tubo de paredes gruesas y del disco de espesor constante que gira a gran velocidad. La naturaleza de las fuerzas interiores que surgen en el tubo de paredes gruesas bajo la acción de una presión y las que se originan en el disco que gira a gran velocidad es distinta. Sin embargo el cálculo de estas dos piezas conduce a un esquema de cálculo común, al esquema del cuerpo de revolución. El análisis posterior demuestra también que son idénticas las ecuaciones diferenciales que determinan los desplazamientos y las tensiones en los dos casos. Es conveniente, por lo tanto, analizar estos dos problemas simultáneamente.

Veamos, ante todo, las particularidades del esquema de cálculo y deduzcamos las ecuaciones de las deformaciones y las ecuaciones de equilibrio para el sólido cilíndrico simétrico respecto a un eje en el caso más simple cuando las cargas y las tensiones permanecen invariables a lo largo del eje del cilindro. Una vez obtenidas estas ecuaciones, basándonos en ellas, analizaremos los dos problemas indicados anteriormente.

Veamos un cuerpo homogéneo de forma cilíndrica (fig. 309) solidificado, de una u otra manera, pero con carga exterior simétrica respecto al eje y constante a lo largo de este mismo eje. Las dimensiones del cilindro pueden ser las más diversas sin limitar la relación entre los diámetros interior y exterior del cilindro. La longitud del cilindro se considera por ahora arbitraria. En adelante, a este respecto, se introducirán ciertas restricciones. Cada punto del cilindro al deformarse éste, se desplaza. De las condiciones de simetría se deduce que estos desplazamientos ocurren en los planos radiales. El punto puede desplazarse en la dirección del radio y a lo largo de la generatriz correspondiente.

Designamos por u el desplazamiento radial de un punto arbitrario. La magnitud u será función del radio variable r y no variará a lo largo del cilindro. Consideramos positiva la dirección de r que se mide desde el eje del cilindro (fig. 309). En lo que se refiere a los desplazamientos a lo largo del eje, consideraremos que éstos son

originados solamente por el alargamiento o acortamiento general del cilindro. Si existen los desplazamientos axiales, se distribuyen de manera tal que las secciones transversales del cilindro permanecen planas.

Designemos por ϵ_r y ϵ_t los alargamientos unitarios en el cilindro en la dirección radial y circunferencial respectivamente y expresémoslos a través del desplazamiento u .

Para ello analizamos el segmento elemental $AB = dr$ que se obtiene en la dirección radial (fig. 310) antes y después de cargar el cilindro.

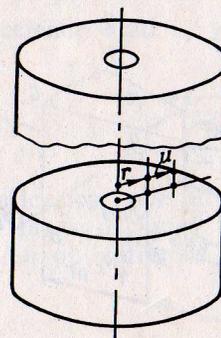


Fig. 309.

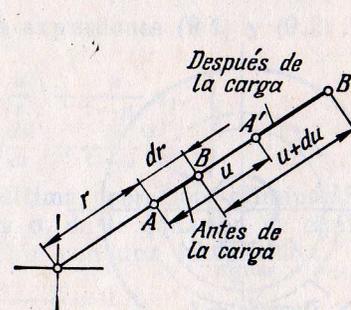


Fig. 310.

El punto A recibe el desplazamiento u y el punto B , el desplazamiento $u+du$. Es fácil demostrar que la nueva longitud del elemento será $dr+du$ y su alargamiento unitario,

$$\epsilon_r = \frac{du}{dr} \quad (9.1)$$

Veamos ahora la longitud de la circunferencia trazada dentro del cilindro antes y después de la sollicitación (fig. 311). La longitud de la circunferencia antes de la sollicitación del cilindro es $2\pi r$. Después de aplicar la carga el radio aumenta en la magnitud u , resultando la longitud de la circunferencia $2\pi(r+u)$. El alargamiento unitario circunferencial será,

$$\epsilon_t = \frac{2\pi(r+u) - 2\pi r}{2\pi r}$$

o sea,

$$\epsilon_t = \frac{u}{r} \quad (9.2)$$

Separemos ahora del cilindro un elemento curvilíneo de seis caras (fig. 312). Sus dimensiones son dr , dz y $r d\phi$.

En las secciones axiales del cilindro (plano $ABCD$ del elemento), debido a las condiciones de simetría axial, son nulas las tensiones

tangenciales, y aparecen solamente tensiones normales σ_t denominadas tensiones *circunferenciales*. En las secciones transversales del cilindro (plano *CDEF* del elemento) también se supone que las tensiones tangenciales son iguales a cero. Esto se deduce de la condición de independencia de los desplazamientos u de la coordenada z . En las secciones transversales pueden aparecer tensiones normales (axiales) σ_z que surgen como consecuencia de la sollicitación del cilindro por cargas orientadas según el eje. Se supone que estas tensiones no varían tanto en la dirección axial, como radial del cilindro.

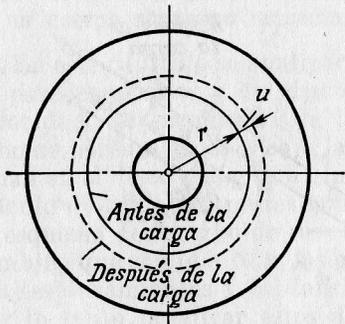


Fig. 311.

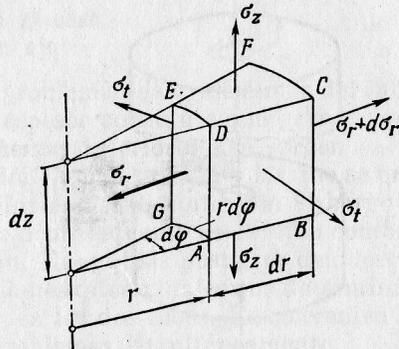


Fig. 312.

Como los planos *ABCD* y *CDEF* son planos principales, será principal también el plano *ADEG*. Designamos la tensión en este plano por σ_r . Esta tensión se denomina tensión *radial*. Al pasar del radio r al radio $r+dr$ la tensión σ_r recibirá el incremento $d\sigma_r$.

De acuerdo con este planteamiento, la determinación de las tensiones y los desplazamientos en el cuerpo de revolución se lleva a cabo por funciones de un solo argumento, el radio r .

Proyectando las fuerzas que actúan sobre el elemento, sobre la dirección del radio, obtendremos la condición de equilibrio siguiente,

$$(\sigma_r + d\sigma_r)(r + dr) d\varphi dz - \sigma_r r d\varphi dz - \sigma_t dr dz d\varphi = 0,$$

de donde se obtiene,

$$\sigma_r + \frac{d\sigma_r}{dr} r - \sigma_t = 0,$$

o sea,

$$\frac{d}{dr}(\sigma_r r) - \sigma_t = 0. \quad (9.3)$$

El resto de las ecuaciones de equilibrio del elemento se satisface automáticamente.

De acuerdo con la ley de Hooke generalizada, las tensiones σ_r , σ_t y σ_z están relacionadas con los alargamientos unitarios ϵ_r ,

y ϵ_t como sigue,

$$\epsilon_r = \frac{1}{E} [\sigma_r - \mu(\sigma_t + \sigma_z)], \quad \epsilon_t = \frac{1}{E} [\sigma_t - \mu(\sigma_r + \sigma_z)].$$

Consideraremos conocida la tensión σ_z que depende de las condiciones de sollicitación del cilindro por fuerzas axiales aplicadas a los extremos. Expresamos ahora las tensiones σ_r y σ_t por ϵ_r , ϵ_t y σ_z . De las dos últimas ecuaciones obtendremos,

$$\sigma_r = \frac{E}{1-\mu^2} (\epsilon_r + \mu\epsilon_t) + \frac{\mu}{1-\mu} \sigma_z, \quad \sigma_t = \frac{E}{1-\mu^2} (\epsilon_t + \mu\epsilon_r) + \frac{\mu}{1-\mu} \sigma_z.$$

Introduciendo aquí ϵ_r y ϵ_t de las expresiones (9.1) y (9.2) hallaremos,

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{E}{1-\mu^2} \left(\frac{du}{dr} + \mu \frac{u}{r} \right) + \frac{\mu}{1-\mu} \sigma_z, \\ \sigma_t &= \frac{E}{1-\mu^2} \left(\frac{u}{r} + \mu \frac{du}{dr} \right) + \frac{\mu}{1-\mu} \sigma_z. \end{aligned} \right\} \quad (9.4)$$

Realicemos, por último, la última operación, eliminando mediante las ecuaciones (9.4) σ_r y σ_t de la ecuación de equilibrio (9.3). Así obtendremos una ecuación con una incógnita u ,

$$\frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du}{dr} - \frac{u}{r^2} = 0,$$

que puede ser escrita así,

$$\frac{d}{dr} \left[\frac{du}{dr} + \frac{u}{r} \right] = 0,$$

ó

$$\frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (ur) \right] = 0. \quad (9.5)$$

Si despejamos de esta ecuación u , por las expresiones (9.4) se podrán obtener también las tensiones.

§ 61. Determinación de los desplazamientos y las tensiones en el cilindro de paredes gruesas

Veamos un cilindro de radio interior a y de radio exterior b (fig. 313). Para mayor generalidad suponemos que el cilindro está sollicitado simultáneamente por una presión interior p_a y por una presión exterior p_b . En adelante, suponiendo $p_b=0$ ó $p_a=0$ podremos analizar el caso de una presión interior solamente o el de una presión exterior. Se debe tener en cuenta que si el cilindro tiene fondo (fig. 314, *a*), entonces aparecerá en éste una fuerza axial de tracción de magnitud,

$$p_a \pi a^2 - p_b \pi b^2.$$

La tensión axial σ_z será,

$$\sigma_z = \frac{p_a a^2 - p_b b^2}{b^2 - a^2}. \quad (9.6)$$

Es importante destacar que la longitud del cilindro se supone suficientemente grande para que se pueda considerar que la tensión σ_z está distribuida uniformemente en la sección transversal y que la influencia restrictiva del fondo sobre los desplazamientos radiales del cilindro es muy pequeña.

Veamos aparte del caso analizado, el caso cuando $\sigma_z=0$, como ocurre, por ejemplo, en el cilindro de la figura 314, b.

El problema de la determinación de las tensiones y los desplazamientos en el cilindro de paredes gruesas se denomina *problema de Lamé*, científico del siglo pasado que resolvió este problema.

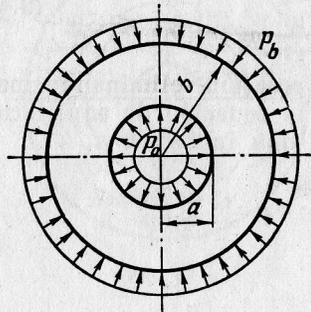


Fig. 313.

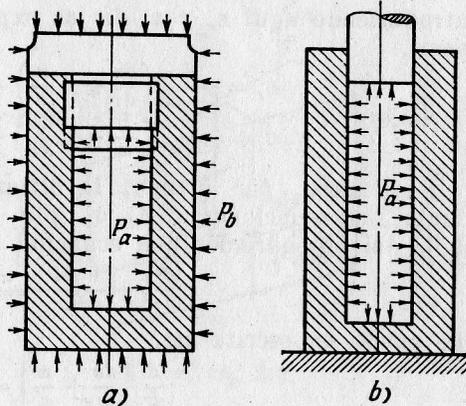


Fig. 314.

Volviendo a la ecuación (9.5) obtendremos el desplazamiento radial,

$$u = C_1 r + \frac{C_2}{r}, \tag{9.7}$$

siendo C_1 y C_2 las constantes de integración. Introducimos esta expresión en (9.4) obteniendo,

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{E}{1-\mu^2} \left[C_1 (1+\mu) - C_2 (1-\mu) \frac{1}{r^2} \right] + \frac{\mu}{1-\mu} \sigma_z, \\ \sigma_t &= \frac{E}{1-\mu^2} \left[C_1 (1+\mu) + C_2 (1-\mu) \frac{1}{r^2} \right] + \frac{\mu}{1-\mu} \sigma_z. \end{aligned} \right\} \tag{9.8}$$

Las constantes C_1 y C_2 se determinan de las siguientes condiciones de borde: cuando $r=a$ $\sigma_r = -p_a$ y cuando $r=b$ $\sigma_r = -p_b$,

$$\begin{aligned} \frac{E}{1-\mu^2} \left[C_1 (1+\mu) - C_2 (1-\mu) \frac{1}{a^2} \right] + \frac{\mu}{1-\mu} \sigma_z &= -p_a, \\ \frac{E}{1-\mu^2} \left[C_1 (1+\mu) - C_2 (1-\mu) \frac{1}{b^2} \right] + \frac{\mu}{1-\mu} \sigma_z &= -p_b, \end{aligned}$$

de donde se obtiene,

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{1-\mu^2}{E} \cdot \frac{1}{1+\mu} \cdot \frac{p_a a^2 - p_b b^2}{b^2 - a^2} - \frac{\mu}{E} \sigma_z, \\ C_2 &= \frac{1-\mu^2}{E} \cdot \frac{1}{1-\mu} \cdot \frac{a^2 b^2}{b^2 - a^2} (p_a - p_b). \end{aligned}$$

Una vez excluidas las constantes C_1 y C_2 , las expresiones (9.7) y (9.8) serán,

$$u = \frac{1-\mu}{E} \frac{p_a a^2 - p_b b^2}{b^2 - a^2} r + \frac{1+\mu}{E} \frac{a^2 b^2}{r} \frac{p_a - p_b}{b^2 - a^2} - \frac{\mu}{E} \sigma_z r, \tag{9.9}$$

$$\sigma_r = \frac{p_a a^2 - p_b b^2}{b^2 - a^2} \mp \frac{a^2 b^2}{r^2} \frac{p_a - p_b}{b^2 - a^2}. \tag{9.10}$$

Las expresiones de σ_r y σ_t se dan aquí en una misma fórmula. Al subíndice superior corresponde el signo negativo y al inferior, el signo positivo.

La existencia de la tensión axial σ_z influye solamente sobre la magnitud del desplazamiento radial u . Cuando el cilindro se presiona en la dirección axial, de las expresiones (9.6) y (9.9) obtendremos,

$$u = \frac{1-2\mu}{E} \frac{p_a a^2 - p_b b^2}{b^2 - a^2} r + \frac{1+\mu}{E} \frac{a^2 b^2}{r} \frac{p_a - p_b}{b^2 - a^2}. \tag{9.11}$$

Cuando no existe la fuerza axial,

$$u = \frac{1-\mu}{E} \frac{p_a a^2 - p_b b^2}{b^2 - a^2} r + \frac{1+\mu}{E} \frac{a^2 b^2}{r} \frac{p_a - p_b}{b^2 - a^2}. \tag{9.12}$$

Veamos ahora algunos casos particulares.

Cilindro sometido a presión interior. En este caso $p_a = p$ y $p_b = 0$. De la expresión (9.10) se obtiene,

$$\sigma_r = \frac{p a^2}{b^2 - a^2} \left(1 \mp \frac{b^2}{r^2} \right). \tag{9.13}$$

En la figura 315 están representados los diagramas de la variación de las tensiones radial y circunferencial dentro del espesor del cilindro solicitado por una presión interior. La tensión circunferencial, como era de esperar, resultó de tracción y la radial, de compresión. En la superficie interior σ_t adquiere su máximo valor,

$$\sigma_t (r=a) = p \frac{b^2 + a^2}{b^2 - a^2}.$$

La tensión radial es aquí igual a $-p$.

Según la teoría de las tensiones tangenciales máximas (cuando no existe la fuerza axial, es decir, cuando $\sigma_z = 0$),

$$\sigma_{cq} = \sigma_1 - \sigma_3 = p \frac{b^2 + a^2}{b^2 - a^2} - (-p)$$

o sea,

$$\sigma_{eq} = p \frac{2b^2}{b^2 - a^2}. \quad (9.14)$$

Es muy importante seguir la variación de las tensiones σ_r y σ_t , a medida que disminuye el espesor del cilindro. Admitamos que

$$b = a + \delta$$

siendo δ , el espesor del cilindro. Entonces,

$$\sigma_t(r=a) = p \frac{(a+\delta)^2 + a^2}{\delta(2a+\delta)}, \quad \sigma_t(r=b) = p \frac{2a^2}{\delta(2a+\delta)}.$$

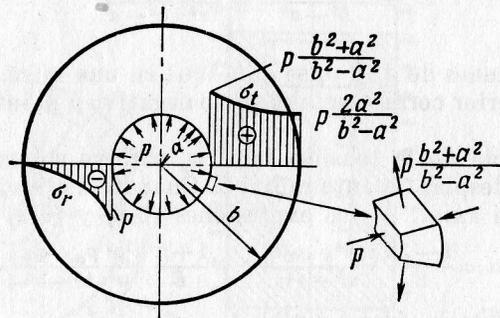


Fig. 315.

Cuando δ es pequeño,

$$\sigma_t(r=a) \approx \sigma_t(r=b) \approx p \frac{a}{\delta}.$$

La tensión radial σ_r en la superficie interior es $-p$ y en la exterior, cero, independientemente del espesor del cilindro. Así pues, vemos que en el caso de un cilindro de pared de espesor pequeño las tensiones circunferenciales se distribuyen casi uniformemente y las radiales, son pequeñas en comparación con las circunferenciales en la misma medida en la que el espesor δ es pequeño en comparación con el radio.

Si el espesor del cilindro aumenta, entonces las tensiones máximas que en él se desarrollan, manteniendo constante la presión, disminuyen, pero no de manera ilimitada. Veamos el caso cuando $b \rightarrow \infty$, es decir, cuando el cilindro es de espesor infinito. En este caso la expresión (9.13) será,

$$\sigma_t = \mp p \frac{a^2}{r^2}.$$

Esto indica que cuando el espesor del cilindro es infinitamente grande la tensión radial en cualquier punto será igual a la circunferencial (fig. 316) y en el caso cuando no existen tensiones axiales todos los puntos se encontrarán en el estado de distorsión pura. Como vemos,

las tensiones son inversamente proporcionales al cuadrado del radio r . Si, por ejemplo, $r=4a$, entonces en los puntos situados a esta distancia del eje, las tensiones constituirán solamente 1/16 parte de las tensiones máximas. Por lo tanto, cuando es suficiente realizar los cálculos con una exactitud del orden del 5—6% (mayor exactitud es,

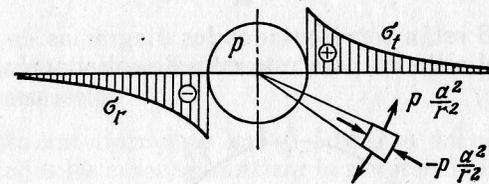


Fig. 316.

prácticamente, imposible aunque sea por el hecho de que los materiales no son perfectamente elásticos), el cilindro para el cual $\frac{b}{a} > 4$ se puede considerar de espesor infinitamente grande. Es muy importante el hecho de que al mismo tiempo no dependemos de la forma del contorno exterior. Si todos los puntos del contorno exterior están alejados del eje del orificio interior a una distancia mayor que $4a$, entonces la configuración del contorno exterior podrá ser arbitraria.

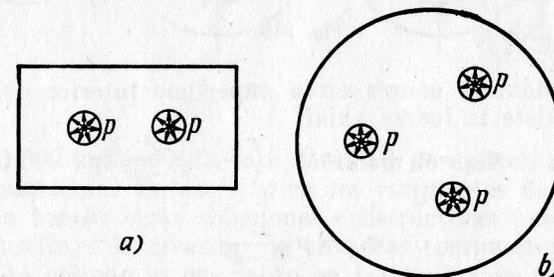


Fig. 317.

El cálculo de los cuerpos elásticos como los indicados, por ejemplo, en la figura 317, se reduce al esquema del cilindro de pared infinitamente gruesa.

La tensión equivalente es de acuerdo a la expresión (9.14), cuando $b \rightarrow \infty$,

$$\sigma_{eq} = 2p.$$

Por lo tanto, si, por ejemplo, el límite de elasticidad del material es 6 000 kgf/cm², en el caso del cilindro de espesor infinitamente grande las deformaciones serán elásticas para presiones inferiores a 3 000 kgf/cm². Más adelante hablaremos de las posibilidades que sur-

gen para garantizar la resistencia en el caso de presiones mayores aún.

Cilindro solicitado por presión exterior. En este caso $p_a=0$, $p_b=p$. La expresión (9.10) será entonces,

$$\sigma_r = -\frac{pb^2}{b^2-a^2} \left(1 \mp \frac{a^2}{r^2}\right).$$

En la figura 318 están representados los diagramas de las tensiones en el espesor del cilindro para este caso de sollicitación. La tensión

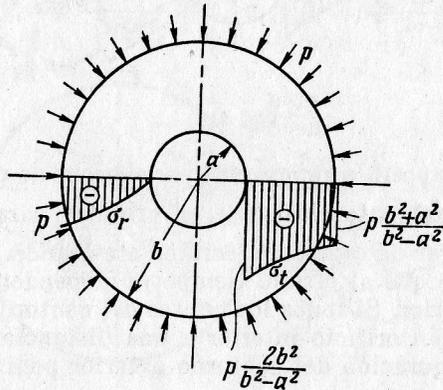


Fig. 318.

equivalente máxima ocurre en la superficie interior del cilindro. Cuando no existe la fuerza axial,

$$\sigma_{eq} = \sigma_1 - \sigma_3 = 0 - \left(-p \frac{2b^2}{b^2-a^2}\right),$$

ó

$$\sigma_{eq} = p \frac{2b^2}{b^2-a^2}.$$

Esta expresión coincide con la del caso de sollicitación por presión interior.

Si no existe el orificio interior, es decir, si $a=0$, entonces las tensiones en el cilindro se distribuirán de manera uniforme,

$$\sigma_r = \sigma_t = -p.$$

Ejemplo 9.1. Calcular el diámetro exterior $2b$ del cilindro sometido a una presión interior de $p=500$ atm, si el coeficiente de seguridad es igual a dos. El límite de fluencia del material es $\sigma_{fl}=\sigma_{fc}=5000$ kgf/cm². El diámetro interior se considera dado $2a=10$ cm.

Los más peligrosos son los puntos situados en la superficie interior del cilindro. Por las fórmulas (9.13) y (9.6) obtendremos,

$$\sigma_r = -p; \quad \sigma_t = p \frac{b^2+a^2}{b^2-a^2}; \quad \sigma_z = p \frac{a^2}{b^2-a^2}.$$

Puesto que $\sigma_1=\sigma_t$, $\sigma_3=\sigma_r$, entonces

$$\sigma_{eq} = \sigma_1 - \sigma_3 = p \frac{2b^2}{b^2-a^2}.$$

Introduciendo en esta expresión los valores numéricos hallaremos,

$$2b = 2 \sqrt{\frac{5}{3}} a = 12,9 \text{ cm.}$$

§ 62. Determinación de las tensiones en los tubos compuestos

Hemos visto anteriormente que el aumento del espesor del tubo no puede, en todos los casos, garantizar la resistencia necesaria. Cuando el espesor tiende al infinito $\sigma_{eq}=2p$.

Cuando en el tubo de paredes gruesas es necesario mantener una alta presión, por ejemplo, de 15 000 atm, resulta necesario que el límite de fluencia del material sea, por lo menos, dos veces superior,

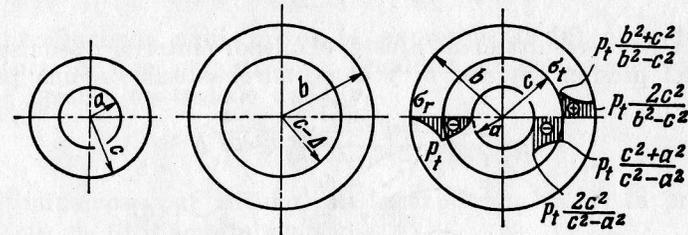


Fig. 319.

es decir, 30 000 kgf/cm². En la actualidad no existen materiales de tan alta resistencia. Es decir, para los recipientes de alta presión es necesario buscar otras soluciones constructivas nuevas. Una de ellas la constituye la creación de cilindros compuestos y unidos a presión. Este método se usa tanto en la técnica de altas presiones como en la artillería para consolidar los cañones de las piezas pesadas.

Supongamos dos cilindros (fig. 319). Designamos por a el radio interior del primer cilindro, y por c , el radio exterior. El radio interior del segundo cilindro es una magnitud Δ menor que el radio exterior del primer cilindro, es decir, $c - \Delta$. El radio exterior del segundo cilindro es b . Si calentamos el segundo cilindro, aumentará así su radio interior resultando que el primer cilindro se podrá introducir libremente en el segundo. Durante el enfriamiento entre los cilindros surgirá la presión de contacto p_k . Calculemos esta presión.

Durante el encaje el radio exterior del cilindro interior disminuye y los puntos del cilindro situados sobre la superficie de contacto recibirán un desplazamiento negativo u_1 . El radio interior del tubo